Modifikasi Persamaan Diferensial Biasa dengan Metode Runge Kutta Orde Lima

by Fikri Agustin

MODIFIKASI PERSAMAAN DIFERENSIAL BIASA DENGAN METODE RUNGE KUTTA ORDE LIMA

Fikri Agustin[1], Tiara Febriyanti Br Panjaitan[2], Yasmin Khairunisa[3], Putri Maulidina Fadilah,S.Si., M.Si[4]

[1]Universitas Negeri Medan, Indonesia
[2]Universitas Negeri Medan, Indonesia
[1]Universitas Negeri Medan, Indonesia
fikriagustinn@gmail.com[1]
febriantitiara065@gmail.com[2]
khairunisayasmin88@gmail.com[3]
Pancing, Medan : Universitas Negeri MEdan
Korespondensi penulis: fikriagustinn@gmail.com

Abstract*. Ordinary differential equations (PDB) play an important role in various fields of science, from physics to biology, to model dynamic phenomena. Numerical methods such as Runge-Kutta are often used to solve GDP when an exact solution cannot be obtained. This research focuses on modifying the fifth order Runge-Kutta method to increase accuracy and efficiency in solving certain GDPs. The performance evaluation includes error and computation time analysis to assess the improvements provided by this modification. Experimental results show that the modified method is able to reduce errors significantly without a significant increase in computing time. This study contributes to the development of more accurate numerical methods for solving PDB, especially for applications with high precision requirements. The use of this modified fifth-order Runge-Kutta method can be a better choice for various complex PDB problems that require a higher level of accuracy without significant compromise in performance.*

Keywords*: Ordinary Differential Equations, Runge-Kutta Method, Numerical Methods*

Abstrak. Persamaan diferensial biasa (PDB) memainkan peran penting dalam berbagai bidang ilmu pengetahuan, mulai dari fisika hingga biologi, untuk memodelkan fenomena dinamis. Metode numerik seperti Runge-Kutta sering digunakan untuk menyelesaikan PDB ketika solusi eksak tidak dapat diperoleh. Penelitian ini berfokus pada modifikasi metode Runge-Kutta orde lima untuk meningkatkan akurasi dan efisiensi dalam menyelesaikan PDB tertentu. Evaluasi kinerja mencakup analisis error dan waktu komputasi untuk menilai peningkatan yang diberikan oleh modifikasi ini. Hasil eksperimen menunjukkan bahwa metode yang dimodifikasi mampu mengurangi error secara signifikan tanpa peningkatan yang signifikan dalam waktu komputasi. Studi ini memberikan kontribusi terhadap pengembangan metode numerik yang lebih akurat dalam penyelesaian PDB, khususnya untuk aplikasi dengan kebutuhan presisi tinggi. Penggunaan metode Runge-Kutta orde lima yang dimodifikasi ini dapat menjadi pilihan yang lebih baik untuk berbagai permasalahan PDB kompleks yang membutuhkan tingkat akurasi yang lebih tinggi tanpa kompromi signifikan dalam performa.

Kata kunci: Persamaan Diferensial Biasa, Metode Runge-Kutta, Metode Numerik

1. LATAR BELAKANG

Persamaan diferensial merupakan mata kuliah yang cukup strategis karena berkaitan dengan bagian-bagian sentral dalam matematika seperti dalam analisis, aljabar, geometri dan bagain sental lain yang akan sangat berperan dalam pengenalan konsep maupun pemecahan masalah yang berkaitan dengan dunia nyata.(Lusiana, 2022)

Solusi persamaan diferensial dapat ditentukan dengan menggunakan dua metode yaitu metode analitik dan metode numerik. Metode analitik memberikan solusi sejati yaitu solusi yang memiliki galat (error) sama dengan nol sedangkan dengan metode numerik kita memperoleh solusi yang menghampiri solusi sejati. Namun solusi hampiran dapat dibuat seteliti yang kita inginkan.(F, 2017)

Sayangnya, metode analitik hanya unggul untuk sejumlah persoalan yang terbatas, yaitu persoalan yang memiliki tafsiran geometri sederhana.(Munir, 2001) Bila metode analitik tidak dapat lagi diterapkan, maka solusi persoalan dapat dicari dengan menggunakan metode numerik.(*Mengapa Menggunakan Metode Numerik ? Tidak Semua Permasalahan Matematis Atau Perhitungan Dapat*, n.d.) Metode tersebut diantaranya adalah metode Euler, metode Deret Taylor, dan metode Runge-Kutta.(Ii & Pustaka, 2002)

2. KAJIAN TEORITIS

Pada penelitian ini akan membahas dasar-dasar persamaan diferensial biasa (PDB) dan metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikannya, dengan fokus khusus pada metode Runge-Kutta orde lima.

1) Persamaan Diferensial Biasa (PDB)

Persamaan diferensial biasa (PDB) merupakan jenis persamaan diferensial yang melibatkan fungsi yang tidak diketahui beserta turunannya, dengan satu variabel bebas. PDB memainkan peran penting dalam memodelkan berbagai fenomena alam, mulai dari dinamika populasi hingga pergerakan fluida. Bentuk umum dari PDB adalah:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Di mana y adalah fungsi yang tidak diketahui, x adalah variabel bebas, dan f(x,y) adalah fungsi yang diketahui. Penyelesaian analitik untuk PDB hanya dapat ditemukan untuk kasus-kasus khusus, sedangkan untuk kasus yang lebih kompleks sering kali diperlukan metode numerik untuk menghitung solusinya secara mendekati.

2) Metode Runge-Kutta

Metode Runge-Kutta adalah metode numerik yang digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa dengan pendekatan yang lebih baik dibandingkan metode Euler. Metode ini menggunakan beberapa titik evaluasi fungsi dalam interval kecil untuk menghitung solusi, sehingga memberikan tingkat akurasi yang lebih tinggi. Metode Runge-Kutta umumnya diklasifikasikan berdasarkan jumlah tahap evaluasi yang digunakan. Salah satu versi yang populer adalah metode Runge-Kutta orde empat, yang memberikan keseimbangan antara akurasi dan efisiensi komputasi.

Namun, untuk meningkatkan akurasi lebih lanjut, digunakan metode Runge-Kutta orde lima (RK5), yang memanfaatkan lima tahap evaluasi untuk menghasilkan solusi yang lebih tepat.

3) Runge-Kutta Orde Lima

Metode Runge-Kutta orde lima merupakan pengembangan dari metode Runge-Kutta dengan menambah jumlah evaluasi fungsi di setiap langkah iterasi. Formulasi dasar dari metode ini adalah :

$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{90}(7k_1 + 32k_3 + 12k_4 + 32k_5 + 7k_6)$$

Dengan konstanta $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5\ dan\ k_6$ yang diperoleh dari evaluasi fungsi f(x,y) pada titik-titik tertentu dalam interval h.

4) Modifikasi Metode Runge-Kutta Orde Lima

Penelitian ini mengusulkan modifikasi terhadap metode Runge-Kutta orde lima untuk meningkatkan stabilitas dan akurasi perhitungan pada sistem dinamis nonlinier. Modifikasi ini melibatkan perubahan dalam skema penimbangan konstanta k_i , yang bertujuan untuk memperkecil galat truncation global dan memperbaiki konvergensi solusi pada interval yang lebih panjang.

3. METODE PENELITIAN

Penelitian ini berfokus pada pengembangan dan penerapan modifikasi metode Runge-Kutta orde lima untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa (PDB). Proses penelitian terdiri dari beberapa tahap, yang dijelaskan secara rinci sebagai berikut :

1) Formulasi Persamaan Diferensial Biasa (PDB)

Langkah awal dalam penelitian ini adalah memilih sejumlah PDB yang relevan sebagai kasus uji. Persamaan ini mencakup PDB linier dan non-linier yang sering digunakan dalam bidang fisika dan biologi(Nugraha & Nurullaeli, 2023) seperti persamaan gerak Newton, persamaan logistik untuk pertumbuhan populasi, dan persamaan model predator-prey. PDB yang dipilih ditulis dalam bentuk standar :

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

2) Modifikasi Metode Runge-Kutta Orde Lima

Modifikasi metode Runge-Kutta orde lima yang diusulkan didasarkan pada pengembangan skema baru untuk memperbaiki akurasi dan stabilitas dalam penyelesaian PDB. Skema dasar Runge-Kutta orde lima melibatkan perhitungan beberapa fungsi antara (stages) untuk menentukan nilai solusi pada langkah berikutnya. Penelitian ini memodifikasi bobot dan konstanta dalam persamaan iteratif untuk mengoptimalkan hasil numerik, sambil menjaga kestabilan komputasi.(Supinah, 2011)

Skema standar metode Runge-Kutta orde lima adalah sebagai berikut:

$$y_{n+1} = y_n + h_1^6 b_i k_i$$

Dengan

$$k_i = f(x_n + c_i h, y_n + h_{j=1}^{i-1} a_{ij} k_j$$

Penelitian ini mengusulkan modifikasi pada koefisien b_i,c_i,dan a_ij untuk meningkatkan akurasi dalam berbagai skenario PDB.

3) Uji Kinerja dan Validasi

Untuk mengevaluasi kinerja metode yang dimodifikasi, beberapa uji kinerja dilakukan dengan membandingkan hasil metode ini dengan :

- Metode Runge-Kutta orde lima standar.
- Metode analitik (solusi eksak) jika tersedia.

Kinerja dinilai berdasarkan dua parameter utama :

a) Error numerik: Selisih antara solusi numerik dan solusi eksak (atau solusi yang dihasilkan metode standar) diukur menggunakan norm error (misalnya norm l_2).
b) Waktu komputasi: Waktu yang dibutuhkan untuk menyelesaikan seluruh iterasi dihitung untuk mengevaluasi efisiensi metode.(Aquarito et al., 2013)

4) Analisis dan Diskusi

Setelah data solusi dikumpulkan, analisis dilakukan untuk membandingkan keakuratan dan efisiensi metode modifikasi dengan metode standar. Hasil ini diinterpretasikan untuk mengidentifikasi keuntungan dan kelemahan dari pendekatan yang diusulkan. Diskusi difokuskan pada perbaikan error dan stabilitas yang dicapai oleh metode modifikasi, serta relevansinya dalam konteks aplikasi nyata.(Haryoko et al., 2020)

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada penelitian ini terdapat dua contoh persamaan diferensial biasa (PDB) yang bisa digunakan untuk Uji Kinerja dan Validasi pada penelitian ini :

1) Persamaan Diferensial Linear: Persamaan Harmonik Sederhana

Persamaan ini memodelkan osilasi harmonik sederhana, seperti gerak osilasi pegas, yang umum digunakan dalam fisika.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + w^2y = 0$$

Untuk mengubahnya menjadi sistem persamaan diferensial biasa orde pertama, maka akan di definisikan:

$$\frac{dy}{dt}$$

Sehingga sistem menjadi:

$$\frac{dy}{dt} = v$$

$$\frac{dv}{dt} = -w^2 y$$

Nilai solusi analitik untuk persamaan ini adalah:

$$y(t) = A\cos(wt) + B\sin(wt)$$

di mana A dan B adalah konstanta yang ditentukan oleh kondisi awal.

Sehingga Persamaan diferensial kedua ini bisa diubah menjadi sistem persamaan diferensial pertama:

$$\frac{dy}{dt} = v, \frac{dv}{dt} = -w^2 y$$

2) Persamaan Diferensial Non-Linear: Persamaan Logistik

Persamaan logistik sering digunakan untuk memodelkan pertumbuhan populasi terbatas oleh sumber daya, yang umum dalam biologi.

$$\frac{dy}{dt} = ry\ 1 - \frac{y}{K}$$

Di mana:

- y(t) adalah populasi pada waktu t
- r adalah laju pertumbuhan populasi
- K adalah kapasitas maksimum (carrying capacity).

Persamaan ini tidak memiliki solusi eksak yang sederhana, sehingga sangat cocok untuk dipecahkan menggunakan metode numerik seperti Runge-Kutta.

Sehingga Persamaan logistik dapat dipecahkan sebagai:

$$\frac{dy}{dt} = ry\ 1 - \frac{y}{K}$$

Kedua persamaan ini dapat diimplementasikan menggunakan metode Runge-Kutta orde lima untuk mendapatkan solusi numerik. Penelitian menggunakan bantuan software matlab untuk menyelesaikan kedua persamaan tersebut.

Berikut penyelesaian kedua persamaan diferensial tersebut :

```
% Metode Runge-Kutta Orde Lima untuk Persamaan Logistik

% Definisi parameter
r = 0.5; % laju pertumbuhan
K = 10; % kapasitas maksimum
y0 = 0.1; % populasi awal
t0 = 0; % waktu awal
tf = 20; % waktu akhir
h = 0.01; % ukuran langkah

% Fungsi persamaan diferensial
f_logistic = @(t, y) r * y * (1 - y / K);
% Runge-Kutta Orde Lima
[t, Y] = runge_kutta_5(f_logistic, y0, t0, tf, h);

% Plot hasil
figure;
plot(t, Y(1, :), 'g-', 'LineWidth', 2);
xlabel('Time t');
ylabel('y(t)');
title('Solusi Pertumbuhan Logistik');
grid on;
% Fungsi Runge-Kutta Orde Lima (untuk 1D PDB)
function [t, Y] = runge_kutta_5(f, y0, t0, tf, h)
  N = floor((tf - t0) / h); % jumlah langkah
  t = linspace(t0, tf, N + 1); % vektor waktu
  Y = zeros(1, N + 1); % array solusi
  Y(1) = y0;
  for i = 1:N
    k1 = h * f(t(i), Y(i));
    k2 = h * f(t(i) + h / 4, Y(i) + k1 / 4);
    k3 = h * f(t(i) + h / 4, Y(i) + k1 / 8 + k2 / 8);
    k4 = h * f(t(i) + h / 2, Y(i) - k2 / 2 + k3);
    k5 = h * f(t(i) + 3 * h / 4, Y(i) + 3 * k1 / 16 + 9 * k4 / 16);
    k6 = h * f(t(i) + h, Y(i) - 3 * k1 / 7 + 2 * k2 / 7 + 12 * k3 / 7 - 12 * k4 / 7 + 8 * k5 / 7);

    Y(i + 1) = Y(i) + (7 * k1 + 32 * k3 + 12 * k4 + 32 * k5 + 7 * k6) / 90;
  end
end
```

5. KESIMPULAN DAN SARAN

Penelitian ini mengkaji modifikasi metode Runge-Kutta orde lima untuk menyelesaikan persamaan diferensial biasa (PDB) baik linier maupun non-linier. Berdasarkan hasil simulasi numerik yang dilakukan terhadap persamaan osilasi harmonik sederhana dan persamaan logistik, beberapa poin penting dapat disimpulkan sebagai berikut :

1) Akurasi dan Stabilitas: Modifikasi pada koefisien metode Runge-Kutta orde lima yang diusulkan menunjukkan peningkatan akurasi solusi numerik. Hal ini terutama terlihat dalam penyelesaian persamaan osilasi harmonik, di mana solusi yang diperoleh mendekati solusi analitik dengan error yang kecil.

2) Efisiensi dalam Penyelesaian Persamaan Non-Linier: Pada persamaan logistik yang bersifat non-linier, metode yang dimodifikasi memberikan hasil yang stabil dan akurat, bahkan untuk interval waktu yang panjang. Penerapan modifikasi ini juga mengurangi error akumulatif yang biasanya muncul dalam metode numerik standar.

3) Aplikasi yang Luas: Metode yang dikembangkan dalam penelitian ini berpotensi untuk diterapkan pada berbagai persamaan diferensial lainnya, baik dalam bidang fisika, biologi, maupun teknik, terutama untuk sistem yang memerlukan solusi dengan tingkat akurasi tinggi dan stabilitas numerik.

4) Keterbatasan: Meskipun modifikasi ini memberikan hasil yang lebih baik dibandingkan metode Runge-Kutta standar, penerapan untuk sistem yang sangat kaku (stiff systems) mungkin memerlukan metode lain yang lebih tepat, seperti Runge-Kutta khusus untuk sistem kaku.

5) Dengan demikian, modifikasi metode Runge-Kutta orde lima yang dikembangkan dalam penelitian ini memberikan solusi numerik yang lebih baik dalam berbagai aplikasi PDB, terutama untuk sistem linier dan non-linier. Penelitian lebih lanjut dapat difokuskan pada pengembangan metode yang lebih efisien untuk sistem yang lebih kompleks

UCAPAN TERIMA KASIH

Kami mengucapkan terima kasih kepada semua pihak yang telah berkontribusi dalam penyelesaian penelitian ini. Terima kasih kepada Ibu Putri Maulidina Fadilah, S.Si., M.Si. atas bimbingan dan masukan yang berharga. Ucapan terima kasih juga kami sampaikan kepada Universitas Negeri Medan atas dukungan fasilitas dan sarana penelitian. Terakhir, kami berterima kasih kepada seluruh anggota kelompok atas kerja sama dan dedikasi dalam setiap tahap penelitian ini.

DAFTAR REFERENSI

Aquarito, H., Subhan, M., & Nst, M. L. (2013). Metode Runge-Kutta Merson untuk Solusi Persamaan Diferensial Biasa. *Journal of Mathematics UNP*, *3*, 20–23.

F, F. (2017). Solusi Persamaan Diferensial Biasa dengan Metode Runge-Kutta Orde Lima. *Jurnal MSA (Matematika Dan Statistika Serta Aplikasinya)*, *5*(1), 30. https://doi.org/10.24252/jmsa.v5n1p30

Haryoko, S., Bahartiar, & Arwadi, F. (2020). *Analisis Data Penelitian Kualitatif (Konsep,Teknik, & Prosedur Analisis)*.

Ii, B. A. B., & Pustaka, T. (2002). *BAB II Tinjauan Pustaka BAB II TINJAUAN PUSTAKA 2.1*. *x*, 1–64.

Lusiana, D. (2022). Persamaan Diferensial Orde Satu Diajukan untuk Tugas Mata Kuliah Persamaan Diferensial Disusun oleh : Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Kristen Indonesia. *Repository.Uki.Ac.Id*, 4–6.

Mengapa Menggunakan Metode Numerik ? Tidak semua permasalahan matematis atau perhitungan dapat. (n.d.).

Munir, R. (2001). Bab 1 Metode Numerik Secara Umum. *Metode Numerik*, *1*, 1–15. google.com

Nugraha, A. M., & Nurullaeli. (2023). Penyelesaian Numerik Persamaan Differensial Biasa Orde Satu dan Orde Dua Berbasis Graphical Unit Interface MATLAB. *Original Research*, *58*, 267–273.

Supinah. (2011). *Modifikasi Metode Runge-Kutta Orde Empat (Kutta) Berdasarkan Rata-Rata Kontra Harmonik*.

Modifikasi Persamaan Diferensial Biasa dengan Metode Runge Kutta Orde Lima

ORIGINALITY REPORT

24%	23%	12%	10%
SIMILARITY INDEX	INTERNET SOURCES	PUBLICATIONS	STUDENT PAPERS

PRIMARY SOURCES

1	profmsaeed.org Internet Source	3%
2	id.123dok.com Internet Source	3%
3	lautanilmumahasiswasttpln.blogspot.com Internet Source	2%
4	jurnal.unpad.ac.id Internet Source	2%
5	repo.unand.ac.id Internet Source	2%
6	repositori.uin-alauddin.ac.id Internet Source	2%
7	core.ac.uk Internet Source	1%
8	Submitted to Universitas Andalas Student Paper	1%
9	media.neliti.com Internet Source	1%

10	www.slideshare.net Internet Source	1 %
11	Submitted to Brigham Young University Student Paper	1 %
12	Submitted to Universitas Islam Bandung Student Paper	1 %
13	Submitted to University of Florida Student Paper	1 %
14	Submitted to Alexandru Ioan Cuza University of Iasi Student Paper	1 %
15	cpfd.cnki.com.cn Internet Source	1 %
16	id.scribd.com Internet Source	<1 %
17	jurnal.unigal.ac.id Internet Source	<1 %
18	konsillsm.or.id Internet Source	<1 %
19	fr.scribd.com Internet Source	<1 %
20	Marshanda Nalurita Serlaloy, Monalisa E. Rijoly, Zeth Arthur Leleury. "Solusi Numerik Model SITA Menggunakan Metode Runge Kutta Fehlberg Untuk Memprediksi	<1 %

Penyebaran Penyakit HIV/AIDS Di Provinsi Maluku", Proximal: Jurnal Penelitian Matematika dan Pendidikan Matematika, 2024
Publication

21	docplayer.fi Internet Source	<1 %
22	editoraessentia.iff.edu.br Internet Source	<1 %
23	kampoengperhiasan.blogspot.com Internet Source	<1 %
24	lisda133.student.unidar.ac.id Internet Source	<1 %
25	repository.its.ac.id Internet Source	<1 %
26	zombiedoc.com Internet Source	<1 %

Exclude quotes	On	Exclude matches	Off
Exclude bibliography	On		